به نام خدا

* یادآوری آنالیز ترکیبی

- جایگشت

- ترکیب

- ترکیب تعمیم یافته

بحث ترکیب را می‌توان به بیش از دو گروه از شی‌ها نیز تعمیم داد. به این صورت که می‌توانیم n شی داشته باشیم که m_1 تا از آنها شبیه هم، m_2 تا شبیه هم، ... ، m_r تا شبیه هم باشند و

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

به عبارت دیگر r دسته از اشیاء داریم که در دسته‌ی iام ، m_i شیء قرار دارد.

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$$

به طور مثال 20 عدد توپ داریم که 7 تای آنها سفید ، 8 تای آنها قرمز و 5 تای آنها سبز است.

$$r = 3$$

$$m_1 = 7 \quad , \quad m_2 = 8 \quad , \quad m_3 = 5 \quad , \quad n = 20$$

تعداد نحوه‌ی چینش این N شی با ترکیب تعمیم یافته به صورت زیر بیان می‌شود

$$\binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r} = \frac{N!}{m_1!\, m_2! \dots m_r!}$$

این مفهوم را در بسط چندجمله‌ای ما نیز دیده‌ایم

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_r)^N = \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_r = 0 \\ \sum_{i=1}^{r} m_i = N}}^{N} \binom{N}{m_1, m_2, \dots, m_r} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_r^{m_r}$$

اگر بخواهیم n شیء را به r دسته تقسیم بندی کنیم به طوری که در دسته i ام، n_i شیء وجود داشته باشد $(i = 1, 2, \ldots, r)$، تعداد حالت های ممکن با ترکیب تعمیم یافته مشخص می شود.

با مرور بحث آنالیز ترکیبی، می خواهیم به حل چند مثال با استفاده از مطالب گفته شده بپردازیم.

* چند مثال

مثال ۱ - یک سکه را 5 بار پرتاب می کنیم، احتمال این پیشامد را حساب کنید که دست کم 3 بار شیر ظاهر شود.

A : { در ۵ بار پرتاب سکه دست کم 3 بار شیر بیاید }

(یعنی 3 بار یا 4 بار یا 5 بار)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

N_A : تعداد حالت های مورد نظر

N : کل تعداد حالت های ممکن $= 2^5$

_ _ _ _ _

پنج بار پرتاب سکه

$\{H, T\}$ $\{H, T\}$ $\{H, T\}$ برای هر بار دو حالت

2 2

$$N_A = \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

تعداد حالت هایی که 3 بار شیر ظاهر شود

= انتخاب 3 مکان از 5 مکان برای شیرها

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}}{2^5}$$

مثال 2 : می‌خواهیم m توپ را در n جعبه قرار دهیم داریم $n \geq m$. احتمال این پیش‌آمد را محاسبه کنید که m توپ در m جعبه مورد نظر قرار بگیرند. با شرط اینکه در هر جعبه فقط یک توپ قرار بگیرد.

$N_A = 1 =$ تعداد حالت‌هایی که m توپ در همان m جعبه انتخاب شده قرار بگیرند

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$N = \binom{n}{m} =$ تعداد حالت‌هایی که می‌توان m جعبه از n جعبه را انتخاب کرد

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{\binom{n}{m}} = \frac{1}{C^n_m} = \frac{1}{\frac{n!}{m!\,(n-m)!}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

* در مسئله قبل اگر ترتیب ها شبیه هم نباشند، احتمال پیش آمد گفته شده را بدست بیاورید.

$$m! = N_A$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$$\frac{n!}{(n-m)!} = P^n_m = N$$

$$\Rightarrow \quad P(A) = \frac{m!}{\frac{n!}{(n-m)!}} = \frac{m!\,(n-m)!}{n!}$$

مثال 3: جعبه ای داریم که تعداد 40 توپ آبی و 60 توپ قرمز وجود دارد. از این جعبه 20 توپ به صورت تصادفی درمی آوریم (بدون جایگذاری) احتمال این پیشامد را حساب کنید که 10 توپ قرمز و 10 توپ آبی باشد.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$$C^{40}_{10} \, C^{60}_{10} = N_A$$

$$C^{100}_{20} = N$$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{\binom{40}{10}\binom{60}{10}}{\binom{100}{20}}$$

* در مسأله قبل اگر توپ ها مشابه نباشند، جواب مسأله را پیدا کنید.

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$$N_A : 20!\binom{40}{10}\binom{60}{10}$$

$$N : P^{100}_{20}$$

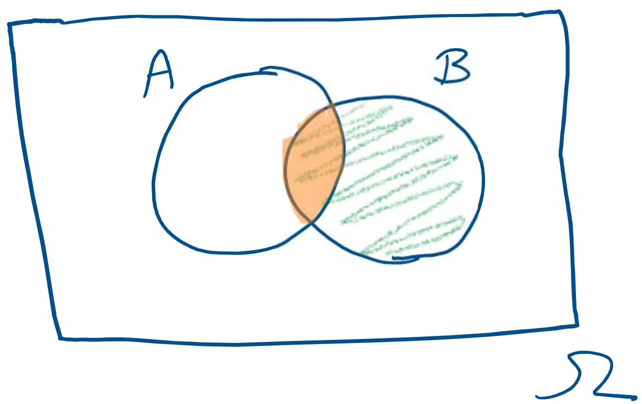
در ادامه می خواهیم مفهوم احتمال شرطی را بررسی کنیم

* احتمال شرطی

احتمال شرطی پیش آمد A به شرط اینکه بدانیم پیش آمد B ، قطعاً رخ داده است را

با $P(A|B)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



درواقع با توجه به اینکه می دانیم پیش آمد B قطعی است ، فضای احتمال را به پیش آمد B نرمالیزه کرده ایم و با این نرمالیزه کردن ، تابع احتمال شرطی را تعریف کرده ایم . بنابراین لازم است نشان دهیم که سه اصل اساسی برای تابع احتمال شرطی $P(A|B)$ نیز برقرار است.

1) $\forall A \; ; \quad P(A|B) \geq 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)^{\geq 0}}{P(B)_{> 0}} \Rightarrow P(A|B) \geq 0$$

2) $P(\Omega \mid B) = 1$

$$P(\Omega \mid B) = \frac{P(\overbrace{\Omega \cap B}^{B})}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) $A \cap C = \varphi \implies P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B)$

$$P(A \cup C \mid B) = \frac{P((A \cup C) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A \cap B) \cup (C \cap B))}{P(B)}$$

$$= \frac{P(A \cap B) + P(C \cap B)}{P(B)} = \underbrace{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}}_{P(A \mid B)} + \underbrace{\frac{P(C \cap B)}{P(B)}}_{P(C \mid B)}$$

$(A \cap B) \cap (C \cap B) = \varphi$

$A \cap C = \varphi$

$\Longrightarrow P(A \cup C | B) = P(A|B) + P(C|B)$

به این ترتیب نشان دادیم که سه اصل اساسی احتمال برای $P(A|B)$ نیز برقرار است. بنابراین $P(A|B)$ نیز یک تابع احتمال است که به آن تابع احتمال شرطی می‌گوییم. به این ترتیب تمامی خصوصیات و قضیه‌هایی که برای تابع احتمال بیان کردیم به طور مشابه برای تابع احتمال شرطی نیز برقرار است (با در نظر گرفتن شرط و نرمال سازی)

به طور مثال، همواره داریم:

$$P(A^c \mid B) = 1 - P(A \mid B)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

یا همواره داریم:

$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(C \mid B) - P(A \cap C \mid B)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

با کمک تابع احتمال شرطی می‌توانیم رابطه پرکاربرد زنجیره‌ای در احتمال را به دست بیاوریم.

* رابطه زنجیره‌ای

می‌دانیم که

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم

$$P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

$(2),(1) \Longrightarrow$

رابطه زنجیره‌ای: $P(A\cap B) = P(A)\,P(B|A) = P(B)\,P(A|B)$

رابطه زنجیره‌ای قابل تعمیم به هر تعداد پیش آمد نیز هست

برای پیش آمدهای A_1 , A_2 , ... , A_n داریم

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2 | A_1)\,P(A_3 | A_2, A_1) \dots P(A_n | A_{n-1} \dots A_1)$$

یا $P(A_1 A_2 \dots A_n)$

یا

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \prod_{i=2}^{n} P(A_i | A_{i-1}, \dots, A_1)$$

مثال ۱- یک تاس را پرتاب می کنیم. احتمال این پیش آمد را حساب کنید که عدد ظاهر شده کوچکتر از 3 باشد. به شرط آنکه بدانیم عدد ظاهر شده فرد است.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

عدد ظاهر شده کمتر از 3 باشد

عدد ظاهر شده فرد باشد

$B = \{1,3,5\}$

$A = \{1,2\}$

$A \cap B = \{1\}$

یا به عبارت دیگر

$$P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B}$$

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = \frac{1}{3}$$

مثال 2 - فرض می‌کنیم دیودی داریم که احتمال اینکه بعد از یک زمان t خراب شود برابر $e^{-\alpha t^2}$ باشد.

اگر بدانیم که این دیود تا لحظه‌ی T_0 سالم بوده است، احتمال این را حساب کنید که دیود در بازه‌ی

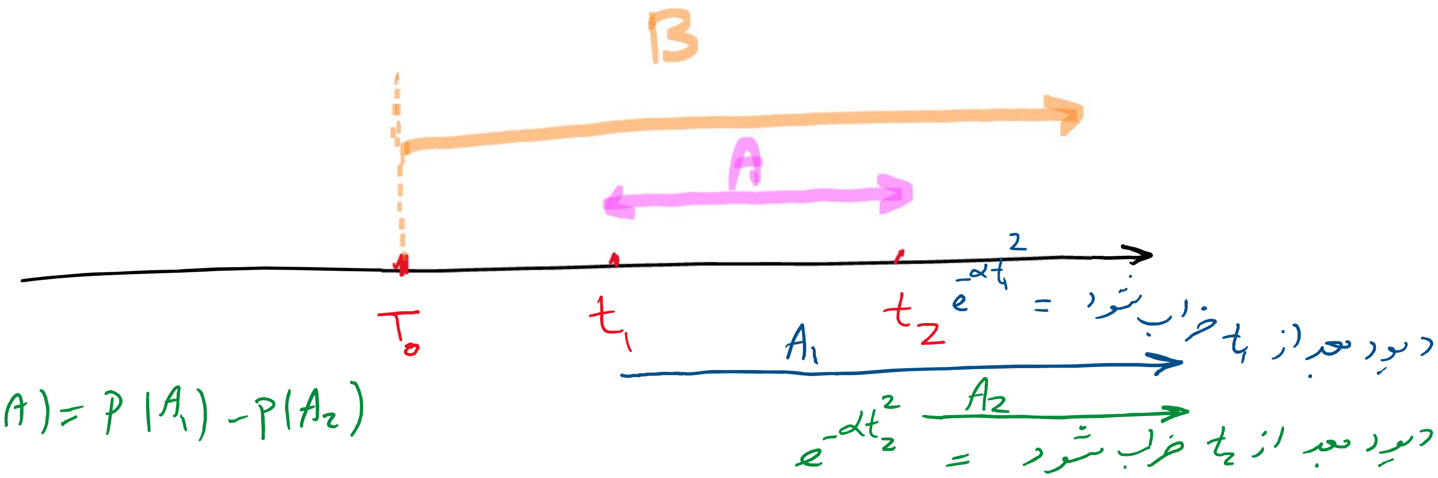
زمانی بین t_1 و t_2 خراب شود. فرض می‌کنیم $t_1 , t_2 > T_0$ و $t_1 < t_2$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

B = دیود تا لحظه‌ی T_0 سالم بوده است = دیود بعد از زمان T_0 خراب شده است $= e^{-\alpha T_0^2}$

A = دیود در بازه‌ی زمانی بین t_1 و t_2 خراب شود.

$$P(A\cap B) = P(A)$$



$$\left.\begin{array}{l} A = A_1 - A_2 = A_1 \cap A_2^c \\ A_2 \subset A_1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) = P(A_1) - P(A_2)$$

$$\Longrightarrow \quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{e^{-\alpha t_1^2} - e^{-\alpha t_2^2}}{e^{-\alpha T_0^2}}$$

مثال 3 - مسابقه‌ای ترتیب داده شده است که خانواده‌هایی می‌توانند در آن شرکت کنند که دست‌کم یک فرزند دختر داشته باشند. اگر خانواده X در این مسابقه شرکت کرده باشند و بدانیم که سه فرزند دارند، احتمال اینکه هر سه فرزند آنها دختر باشند را حساب کنید.

A : هر سه فرزند خانواده X دختر باشند $\quad (g,g,g)$

B : خانواده X سه فرزند دارند که دست‌کم یکی از آنها دختر است.

$P(A|B)$

1 2 3

g, b   g, b   g, b

$\Omega - \{(b,b,b)\}$

$$P(A|B) = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{1}{7}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{7/8} = \frac{1}{7}$$

مثال 4 - (استفاده از رابطه زنجیره‌ای در حل مسأله)

در جعبه‌ای 4 توپ قرمز و 6 توپ آبی داریم. از این جعبه 2 توپ را به صورت تصادفی (بدون جایگزینی) انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه هر دو توپ قرمز باشند، چقدر است؟

این گونه مسائل را قبلا با کمک آنالیز ترکیبی حل کرده‌ایم.

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{\binom{6}{0}\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \times \frac{3\times 4}{2}}{\frac{10\times 9}{2}} = \frac{3\times 4}{9\times 10}$$

می‌خواهیم با کمک رابطه زنجیره‌ای نیز این مسئله را حل کنیم.

$$P(A) = P(g_1 \cap g_2) = P(g_1)\,P(g_2 \mid g_1) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9}$$

توپ اول قرمز باشد

توپ دوم قرمز باشد

اولی قرمز باشد

دومی قرمز باشد به شرط اینکه بدانیم اولی قرمز بوده